Fix pontok és választások: stabil házasságok, és ami mögöttük van

Fleiner Tamás

Doktori értekezés tézisei

Budapest, 2018

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Sokat idézett cikkükben Gale és Shapley vetették fel az alábbi problémát [22]. Képzeljük el, hogy n férfi és n nő mindegyike sorba rendezi az ellentétes nem képviselőit aszerint, hogy számára az adott illető hányadikként jön szóba mint házastárs. Ha a fenti szereplők n házaspárt alkotnak, akkor az így meghatározott párosítás instabil, ha található olyan férfi és nő, akik egymást az említett sorban kölcsönösen előbbre helyezték, mint a házastársukat. Természetes cél úgy összeházasítani a példában szereplő személyeket, hogy az imént leírt instabilitás ne lépjen fel. Ez a gondolat több általánosítási lehetőséget rejt magában. Elképzelhető, hogy az egyes játékosok nem egy, hanem több házastársat keresnek. Ennek egy gyakorlati szempontból is érdekes változata az egyetemi felvételi probléma, aholis férfiak és nők helyett az egyetemi szakok és az oda jelentkezők alkotják a két, egymást sorba rendező halmazt, továbbá az egyetemi szakok mindegyike rendelkezik egy, a felvehető hallgatók számát felülről korlátozó kvótával. Ebben a modellben egy felvételi séma (aholis minden jelentkezőt legfeljebb egy szakra vesznek fel, és egyetlen szak sem lépi túl a kvótáját) akkor lesz instabil, ha van olyan szak és hallgató, hogy a szak szívesen felvenné e hallgatót (esetleg azon az áron, hogy egy számára kevésbé értékes hallgatót elutasít), és az említett hallgató pedig jobban jár, ha a felvételi séma által előírt helyett erre a szakra nyer felvételt. Érdemes megemlíteni, hogy a Magyarországon a felvi.hu által meghatározott vonalhúzásból adódó felvételi séma éppen ezt a fajta instabilitást zárja ki.

Elképzelhető az is, hogy nem minden férfi-nő (vagy szak-jelentkező) pár valósulhat meg, azaz a lehetséges házaspárokat (felvételeket) leíró gráf nem teljes páros gráf. Sőt: ennek a gráfnak még csak párosnak sem kell lennie. Erre az általánosításra vezet az a szobatárs probléma, ahol -mondjuk- kétágyas kollégiumi szobákban kell elhelyezni néhány tanulót, akik mindegyike aszerint rendezte sorba a lehetséges szobatársait, hogy mennyire szívesen lakna egy szobában az adott személlyel. Itt egy szobabeosztás instabilitása azt jelenti, hogy található két kollégista, akik szívesebben laknának együtt, mint a beosztás szerinti szobatársukkal.

További, a gyakorlati alkalmazás szempontjából is érdekes általánosítási lehetőség, ha nem követeljük meg az egyes részvevőktől, hogy szigorú sorrendet határozzanak meg lehetséges párjaikon, így a döntetlenek is megengedettek. Az egyetemi felvételi problémában például a jelenkezőknek ugyan szigorú sorrendet kell felállítaniuk a jelentkezéseik között, ám az egyetemi szakok esetében megengedett, hogy két jelentkezőt egyformán értékeljenek, hiszen kizárólag a felvételi pontszám dönt, ami minden további nélkül megegyezhet.

Visszatérve az eredeti problémára: Gale és Shapley az ún. lánykérő algoritmus segítségével igazolták, hogy mind a házassági, mind az egyetemi felvételi problémában mindig létezik stabil megoldás. Knuth könyvében Conwaynek tulajdonítja azt az észrevételt, hogy a stabil párosítások hálót alkotnak [37]. Ez a megfigyelés később elengedhetetlenül fontosnak bizonyult számos további, stabil párosításokkal kapcsolatos eredményhez. A stabil párosítások vizsgálata egyébként számos tudományterület eszköztárát felhasználja: Knuth már említett [37] könyvét egyfajta algoritmuselméleti bevezetőnek szánta azzal, hogy egy kézzelfogható példán szemléltessen számos, az algoritmusok tervezéséhez és analíziséhez szükséges módszert. A ma már klasszikus bonyolultságelméleti és további algoritmikus vonatkozások tekintetében érdemes megemlíteni még Gusfield és Irving könyvét is [24]. A stabil párosításokon történő optimalizálás is természetes feladat, és ehhez különféle poliéderes módszerek bizonyulnak hasznosnak [51, 45, 5, 42, 1, 50, 12]. A gyakorlati alkalmazások kapcsán pedig a játékelméletből ismerős fogalmak és módszerek bukkannak fel, elég talán csak Roth és Sotomayor könyvét említeni [44].

Mai tudásunk alapján bátran kijelenthető, hogy Gale és Shapley a stabil párosítás fogalmának bevezetésével jóval többet ért el, mint a cikkükben megfogalmazott célt, azaz a matematikai-játékelméleti gondolkodásmód népszerűsítését. A munkájuk nyomán indult kutatás eredményeiből világossá válik, hogy mind a gyakorlati alkalmazások, mind pedig az elméleti jelentőségű eredmények okán kivételesen jól eltalált és használható fogalommal van dolgunk. Az előbbi tényt a stabil párosítások elméletében és a mechanizmustervezésben kifejtett munkásságukért 2012-ben Rothnak és Shapleynek ítélt közgazdasági Nobel emlékdíjnál talán nem is kell jobban indokolni, míg az utóbbira példa lehet Galvinnak a Dinitz-sejtésre adott, lényegében stabil párosításokat felhasználó bizonyítása [23] vagy Király váratlan áttörést hozó közelítő algoritmusa [34].

Érdemes még néhány szót szólni az általánosításokkal kapcsolatos eredményekről. Az általánosított stabilitásfogalom manifesztálódhat részben rendezett halmazok közös antiláncában vagy matroidok közös függetlenjében [16], de definiálható hálózati folyamok stabilitása is a közgazdaságtanból ismert ellátási láncok egyfajta modelljeként [14]. A stabil folyammodell szorosan kapcsolódik Ostrovsky-éhoz, ami bizonyos tekintetben általánosabb, másfelől speciálisabb az előbbinél [39]. Minden esetre a közgazdászszakirodalomban komoly áttörésként tartják számon, és számos további eredmény kiindulópontja lett.

A stabil párosításoknak mára már komoly irodalma van. A tudomány 2013 körüli állását, csak az algoritmikus vonatkozások tekintetében foglalja össze Manlove impozáns könyve [38]. A jelen munka egy ennél sokkal szerényebb célt tűz ki maga elé: az olvasót egy unortodox módszer alkalmazásába vezeti be és mutat rá annak néhány érdekes vonatkozására. Mintegy mellékesen igyekszik megváltoztatni a stabil párosítások „történelméről” alkotott képet is. Emlékezetes, hogy Gale és Shapley 1962-ben publikálták az első cikket a témában. Később Roth mutatott rá arra, hogy a lánykérő algoritmus egy változata már 1952 óta alkalmazásban van az USA-ban [41], a stabil párosítások ismert történelme tehát inkább ekkortól kezdődik. Mi arra teszünk kísérletet, hogy még korábbra, konkrétan 1928-ra datáljuk a történet kezdetét, amikoris Knaster és Tarski publikálták (akkor még bizonyítás nélkül) monoton halmazfüggvényekről szóló fixponttételüket [36]. Később, 1955-ben Tarski igazolt egy hálóelméleti általánosítást, aminek alkalmazhatóságát különféle, analízisből ismert középértéktételek levezetésével illusztrálta [49]. Kiderült, hogy a tételnek már a véges esetben is nemtriviális következményei vannak. Világosan megmagyarázza ugyanis, hogy miért is működik a lánykérő algoritmus, illetve a fixpontok hálótulajdonságából közvetlenül levezethetővé válik a stabil párosítások hálótulajdonsága. A stabil párosítások és a monoton leképezések fixpontjai közti kapcsolatot a Kelso és Crawford munkája nyomán bevezetett kiválasztási függvények alkalmazása teremti meg [32].

Terjedelmi okok miatt nem térünk ki a részletekre, csak megemlítünk néhány további, stabil párosítások általánosításaival kapcsolatos jelentős eredményt. Sokáig kérdés volt, hogy egy nem feltétlenül páros gráfban eldönthető-e polinomidejű algoritmussal a stabil párosítás létezése. A pozitív válasz Irvingtől származik, aki a lánykérő algoritmus lépéseiből álló első fázis után ún. rotációkat eliminál algoritmusa második fázisában, míg végül stabil párosítást talál, ha egyáltalán van ilyen a gráfban [31]. Tan később kiterjesztette Irving algoritmusát, és ennek segítségével igazolta stabil félpárosítások létezését, amelyek $\frac{1}{2}$ súlyú éleket is tartalmazhatnak [48]. Az is kiderült, hogy pontosan akkor van stabil párosítás egy gráfban, ha van olyan stabil félpárosítás, amely nem tartalmaz páratlan kört $\frac{1}{2}$ súlyú élekből. Aharoni és Fleiner arra mutattak rá, hogy a stabil félpárosítás létezése a Scarf-lemma következményeként is felfogható, a Scarf-lemma pedig tekinthető a Brouwer-féle fixponttétel egy rokonának [3]. Ilyenformán a stabil párosítások fixpontokként is kezelhetők, páros gráf esetén egy monoton halmazfüggvény, nempáros gráf esetén egy ennél bonyolultabb leképezéseként. Cechlárová és Fleiner a stabil b-párosítás keresésére adtak eljárást Irving algoritmusának általánosításával [9]. Biró, Cechlárová és Fleiner a stabil párosítások változását vizsgálta abban az esetben, ha egy új játékos jelenik meg a piacon. Eredményeik segítségével nempáros gráf esetén is definiálható egyfajta barát-ellenség viszony a játékosok között aszerint, hogy ha az egyikük távozik, akkor ettől a másik helyzete javul vagy romlik [6].

A tézisfüzet az alábbiak szerint épül fel. A jelen fejezet további részében bevezetjük az általunk használt terminológiát és néhány, a továbbiakhoz elengedhetetlenül szükséges fogalmat. Konkrétan, az 1.1. részben ismertetjük az általunk használt legegyszerűbb stabilitásfogalmat és bemutatunk egy általánosan használható eszközt, mellyel Gale és Shapley tétele is egyszerűen igazolható. Az 1.2. részben definiáljuk a további modellek szempontjából alapvető fontosságú kiválasztási függvényeket és azok számunkra fontos tulajdonságait. Az 1.3. részben mutatunk rá arra, hogy a Gale-Shapley algoritmus kulcsa Tarski fixponttétele. Ez a megfigyelés rendkívül hatékony eszköznek bizonyul különféle általánosítások és kiterjesztések igazolásában. Ilyenekre látunk példát a 2. fejezetben, aholis matroidokra ill. részbenrendezésekre mutatunk be stabilitás-jellegű eredményeket. Ezután a 3. fejezetben különféle kernelek hálótulajdonságával kapcsolatban vilátítunk rá néhány érdekes tényre. Az ezt követő 4. fejezet további, időnként meglepő alkalmazásokra ad példát. A Tarski-féle fixponttétel szerint monoton leképezés fix pontjai hálót alkotnak, ezért bizonyos stabil párosítás poliéderekre közvetlenül alkalmazható Hoffman hálópoliéderekről szóló egyik eredménye. Az 5. fejezetben ennek segítségével adjuk meg különféle általánosított stabil párosítás poliéderek egyfajta implicit karakterizációját. Ugyanitt megemlítjük a stabil b-párosítás poliédernek egy kevésbé implicit leírását is, amely a stabil b-párosítások egy meglepő tulajdonságát aknázza ki. A 6. fejezetben arra mutatunk rá, hogy miként páros gráf maximális méretű párosításának problémája megfogalmazható hálózati folyam maximalizálásaként, ugyanúgy a folyamproblémának is létezik olyan, preferenciákkal ellátott kiterjesztése, amely magában foglalja a stabil párosítás problémát. Az ebben a fejezetben ismertetett stabil folyam fogalom azonban tovább általánosítható, és a közgazdaságtanból ismert ú.n. ellátási láncok vizsgálatában bizonyul hasznosnak. Az utolsó, 7. fejezet a stabil párosítás probléma nem páros gráfhoz kötődő általánosításával foglalkozik. Aharonival közös eredményünk mutat rá arra, hogy Tan egy korábbi, stabil félpárosítások létezéséről szóló eredményének [48] gyökere Scarf ismert lemmája [47], amely a Kakutani-féle fixponttétel rokonának tekinthető. Ugyancsak ebben a fejezetben igazoljuk alkalmas kiválasztási függvények esetén a stabil félpárosítások megfelelő általánosításának létezését.

Tekintettel arra, hogy a jelent tézisfüzet célja a szerző kutatási tevékenységének bemutatása, az értékelést megkönnyítendő a legalább részben saját eredményeket aláhúzással ill. $\boxed{\text{bekeretezéssel}}$ jelöljük, az utóbbi megjelölést akkor alkalmazzuk, ha a szóban forgó eredmény tudományos fokozatszerzéshez még nem került felhasználásra, így az ilyen eredmények tézispontoknak is tekinthetők.

1.1. Stabil párosítások

Legyen $G = (V, E)$ gráf, és legyen minden v csúcsra adott a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazának egy $\preceq_v$ lineáris rendezése, amit preferenciarendezésnek is szokás nevezni. Azt mondjuk, hogy az e él *jobb* a v számára az f élnél, ha $e \preceq_v f$ teljesül. Élek egy $M \subseteq E$ halmaza *párosítás*, ha az M-beli éleknek nincs közös csúcsa, azaz $d_M(v) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra. Tetszőleges $b : V \to \mathbb{N}$ korlátok esetén az $M \subseteq E$ halmazt *b-párosításnak* nevezzük, ha $d_M(v) \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára. Világos, hogy a párosítás a b-párosítás speciális esete, mégpedig $b \equiv 1$ esetén. Azt mondjuk, hogy az M párosítás *dominálja* az $e = uv$ élt, ha M-nek van olyan m éle, amire $m \preceq_u f$ vagy $m \preceq_v f$ teljesül. Hasonlóan, az M b-párosítás *b-dominálja* az $e = uv$ élt, ha M-nek vannak olyan $m_1, \ldots, m_k$ élei, amire $m_i \preceq_u f$ teljesül minden $1 \leq i \leq k = b(u)$ esetén vagy $m \preceq_v f$ teljesül minden $1 \leq i \leq k = b(v)$ esetén. Az e él akkor *blokkolja* az M (b-)párosítást, ha M nem (b-)dominálja e-t. Végül M akkor *stabil* (b-)párosítás, ha nincs blokkoló él, azaz, ha M minden M-en kívüli élt (b-)dominál. Ha például G egy páratlan kör, és valamilyen körüljárás szerint minden csúcs a körüljárásban korábbi élt preferálja a későbbihez képest, akkor könnyen látható, hogy G-nek nincs stabil párosítása. Páros gráfok esetén azonban nem ez a helyzet, és ezt az alábbi tétel garantálja.

1.1. Tétel (Gale és Shapley [22]) *Tetszőleges G páros gráfon tetszőleges preferenciák esetén létezik stabil párosítás.*

Gale és Shapley valójában a fenti tételt a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra igazolták, azonban ezt az eredményt kiterjesztve azt is megmutatták, hogy mindig létezik stabil b-párosítás ha a páros gráf egyik színosztályán $b \equiv 1$ teljesül. Gale és Shapley bizonyítása a lánykérő algoritmus, ami a probléma tetszőleges bemenetéhez hatékonyan talál egy stabil párosítást. Az algoritmus működése (fiú-lány-házasság terminológiában) az alábbi. Először minden fiú megkéri a számára legszimpatikusabb lány kezét. Ha minden fiú más-más lányt kér meg, akkor a lánykérésekből házasságok lesznek, és ez stabil. Ha azonban van olyan lány, akit egynél több fiú kér meg, úgy az ilyen lányok a legjobb kérőjük kivételével minden más kérőjüket kikosarazzák. Ha történt kikosarazás, úgy a fiúk ismételten megkérik a legszimpatikusabb olyan lány kezét, aki még nem kosarazta ki az adott fiút. Előbb utóbb nem lesz kikosarazás: ekkor az utolsó lánykérésekből házasságok lesznek, és az így kapott párosítás az algoritmus outputja.

Gale és Shapley cikkükben megjegyzik, hogy a tárgyalt eredmény kiváló ellenpélda arra a közkeletű vélekedésre, miszerint minden valamirevaló matematikai levezetés óhatatlanul nehéz számításokat és/vagy különféle obskurus képleteket tartalmaz. A lánykérő algoritmus leírása ill. helyességének igazolása például mentes mindezektől, mégis egyértelműen egy „tisztességes" matematikai bizonyítás. Mindezt nem vitatva, az alábbiakban rámutatunk az algoritmus helyességének egy unortodox bizonyítására. Ez az alábbi apró, nem csak páros gráfokra érvényes megfigyelésen alapul.

1.2. **Lemma** *Legyen $G = (V, E)$ (nem feltétlenül páros) gráf minden v csúcsához megadva a $\preceq_v$ preferenciarendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán, valamint tegyük fel, hogy $e \prec_v f$ teljesül arra az $e = uv$ élre, ami legjobb az u szerinti $\preceq_u$ rendezés szerint. Ekkor G-ben a stabil párosítások halmaza megegyezik a $G - f$ gráf stabil párosításainak halmazával.*

Az 1.2. Lemma szerint tehát „ingyen" törölhetünk G-ből bizonyos éleket anélkül, hogy ettől akár csak egy stabil párosítás is eltűnne vagy keletkezne. Páros gráf esetén ezekkel a lépésekkel előbb-utóbb oda jutunk, hogy nem lehet további élt törölni, ezért mind a fiúk, mind a lányok más-más lányt ill. fiút szerepeltetnek a preferenciasorrendjük élén. Könnyen látható, hogy ilyenkor mind a fiúk legjobb választásai, mind a lányok legjobb választásai egy-egy stabil párosítást határoznak meg az éltörlések utáni gráfban, így persze az 1.2. Lemma többszöri alkalmazása miatt az eredeti G gráfban is. Sőt, az is azonnal látszik a gondolatmenetből, hogy a lánykérő algoritmus által szolgáltatott stabil párosítás *fiú-optimális*, ami azt jelenti, hogy abban minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legszimpatikusabb lányt kapja feleségül. De az is következik mindebből, hogy ez az eljárás minden lány a számára lehető legrosszabb olyan férjet szolgáltatja, aki stabil párosításban az adott lány párja lehet.

A fent vázolt bizonyítás minimális módosítással igazolja a lánykérő algoritmus b-párosításokra történő értelemszerű kiterjesztésének a helyességét, valamint azt is, hogy a megtalált stabil b-párosítás a fenti értelemben optimális lesz az ajánlatokat tevő az oldalra számára.

Gráfelméleti módszerekkel nem nehéz a fiú-optimális párosítás létezésének azt az általánosítását sem igazolni, amely szerint a stabil (b-)párosítások hálót alkotnak az alábbiak szerint. Ha M_1 és M_2 stabil (b-)párosítások, és minden fiú az $M_1 \cup M_2$-ből szabadon választ magának (b-)párosítás él(eke)t, akkor az így választott élek ugyancsak stabil (b-)párosítást alkotnak.

1.2. Kiválasztási függvények

Stabil párosítások és általánosításaik vizsgálatakor rendkívül hasznos segédeszköz a kiválasztási függvény fogalma, mely segítségével könnyen leírható az egyes játékosok preferenciája. Az alább leírt tárgyalásmód unortodoxiája a determinánsokra alapozott felépítés. Tetszőleges E alaphalmaz esetén az $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ leképezés

- *kiválasztási függvény*, ha van olyan $\mathcal{D} : 2^E \to 2^E$ leképezés, amelyre $\mathcal{F}(X) = X \cap \mathcal{D}(X)$ teljesül az E minden X részhalmazára (az ilyen $\mathcal{D}$ leképezést az $\mathcal{F}$ *determinánsának* nevezzük) ill.
- *monoton*, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ teljesül $X \subseteq Y \subseteq E$ esetén, valamint
- *antiton*, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ teljesül $Y \subseteq X \subseteq E$ esetén, végül

- *komonoton*[1], ha $\mathcal{F}$ olyan kiválasztási függvény, aminek van antiton determinánsa[2].

Világos, hogy $\mathcal{F}$ pontosan akkor kiválasztási függvény, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq X$ teljesül minden $X \subseteq E$ esetén, továbbá, hogy egyazon kiválasztási függvénynek számos különböző determinánsa létezhet. A „tankönyvi" példa komonoton kiválasztási függvényre a fiúk kiválasztási függvénye a Gale-Shapley modellben.

1.3. Példa *Legyen $G = (V, E)$ véges páros gráf, melynek színosztályait a fiúk F ill. lányok L halmaza alkotja, és tartozzék minden $v \in V$ csúcshoz egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán. Ekkor tetszőleges $X \subseteq E$ élhalmazból a fiúk által kiválasztott élek $\mathcal{F}_F(X)$ halmaza nem más, mint azon X-beli $e = fl$ élek halmaza, amelyre e az f fiú számára a legjobb él X-ben a $\preceq_f$ rendezés szerint.*

Az 1.3. példában szereplő kiválasztási függvény egy könnyen láthatóan antiton determinánsa például a $\mathcal{D}_F(X) := \bigcup_{v\in F} \bigcap_{e\in X\cap E(v)} \mathcal{D}_F(v, e)$ leképezés, ahol $e \in E(v)$ esetén $\mathcal{D}_F(v, e) := \{e' \in E(v) : e' \preceq_v e\}$ azon élek halmaza, amelyek v számára a $\preceq_v$ preferencia szerint nem rosszabbak e-nél. A fenti példabelihez hasonlóan definiálható a lányok $\mathcal{F}_L$ kiválasztási függvénye és az ahhoz tartozó antiton $\mathcal{D}_L$ determináns.

1.4. Megfigyelés *Az $S \subseteq E$ pontosan akkor stabil párosítás a $G = (V, E)$ páros gráfban, ha vannak olyan $X, Y \subseteq E$ élhalmazok, amelyekre $S = X \cap Y$ mellett $\mathcal{D}_F(X) = Y$ és $\mathcal{D}_L(Y) = X$ teljesül.*

Kiválasztási függvényeknek a mi szempontunkból alapvető fontosságú tulajdonságai az alábbiak. Az $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ kiválasztási függvény

- *IRC* tulajdonságú, ha tetszőleges $\mathcal{F}(X) \subseteq Y \subseteq X$ esetén $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$ teljesül,
- *útfüggetlen*, ha $X, Y \subseteq E \Rightarrow \mathcal{F}(X \cup Y) = \mathcal{F}(X \cup \mathcal{F}(Y))$,
- *növekedő*, ha $X \subseteq Y$ esetén $|\mathcal{F}(X)| \le |\mathcal{F}(Y)|$ áll.

1.5. Megfigyelés *Legyen E véges halmaz és $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvény. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor IRC tulajdonságú, ha $\mathcal{F}$ útfüggetlen. Továbbá, ha $\mathcal{F}$ növekedő, akkor $\mathcal{F}$ útfüggetelen (és így IRC tulajdonságú) is egyúttal.*

1.6. $\boxed{\text{Lemma}}$ (Fleiner, Jankó [20]) *Legyen E véges halmaz és $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvény. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor útfüggetlen, ha $\mathcal{F}$-nek létezik olyan $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ antiton determinánsa, amelyre*

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(\mathcal{F}(X)) \text{ teljesül tetszőleges } X \subseteq E \text{ esetén.} \tag{1.1}$$

[1] Az angol nyelvű szakirodalomban „substitutable" tulajdonságnak nincs frappáns magyar neve, így jobb híján a komonoton kifejezést használjuk, utalva arra, hogy a ki nem választott elemek által definált kiválasztási függvény monoton.

[2] A komonoton tulajdonság szokásos definíciója azt kívánja meg, hogy tetszőleges $X \subseteq E$ és $e \in E$ esetén $X \cap F(X + e) \subseteq F(X)$ teljesüljön. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ha a választék ismeretében egy bizonyos lehetőség nem érdekel bennünket, akkor ugyanez a lehetőség a választék bővülése nyomán sem lesz érdekes a számunkra.

1.3. Tarski fixponttétele és a Gale-Shapley algoritmus

Az $(L, \preceq)$ részbenrendezett halmazt (avagy posetet) *hálónak* nevezzük, ha bármely $x, y \in L$ elemnek van egy $x \wedge y$-nal jelölt legnagyobb alsó, és egy $x \vee y$-nal jelölt legkisebb felső korlátja. Ha a részbenrendezés világos a szövegkörnyezetből, akkor a beszélhetünk L hálóról. Az L háló akkor *teljes*, ha tetszőleges $X \subseteq L$ halmaznak van egy $\bigwedge X$-szel jelölt legnagyobb alsó és egy $\bigvee X$-szel jelölt legkisebb felső korlátja. Teljes háló esetén 0 ill. 1 jelöli a háló legkisebb és legnagyobb elemét, azaz $0 = \bigwedge L$ ill. $1 = \bigvee L$. Világos, hogy minden véges háló teljes, ám ez fordítva nem igaz, pl. az egész számok véges részhalmazai ugyan hálót alkotnak a tartalmazkodásra, de ennek a halmaznak nincs legnagyobb eleme, így ez a háló nem teljes. Az előző, 1.2 részben definiált fogalmak minden további nélkül definiálhatók hálókon azzal, hogy a $\subseteq$ reláció a háló $\preceq$ rendezésének, a $\cap$ és $\cup$ műveletek pedig a $\wedge$ és $\vee$ hálóműveleteknek felelnek meg. Teljes hálókról szól Tarski alábbi fixponttétele.

1.7. Tétel (Tarski [49]) *Ha $(L, \preceq)$ teljes háló és $\mathcal{F} : L \to L$ monoton leképezés, akkor $\mathcal{F}$ fixpontjainak halmaza nem üres, továbbá $\mathcal{F}$ fixpontjainak halmaza teljes hálót alkot a $\preceq$ rendezésre nézve.*

Megemlítjük, hogy a számunkra legfontosabb $(L, \preceq) = (2^E, \subseteq)$ esetre az 1.7. tételt Knaster és Tarski bizonyították [36]. Ugyancsak érdemes megfigyelni, hogy véges L háló esetén a legkisebb fixpont megkapható, mint a $0 \preceq \mathcal{F}(0) \preceq \mathcal{F}(\mathcal{F}(0)) \preceq \dots$ lánc legnagyobb eleme. (Hasonlóan, a legnagyobb fixpont az $1 \succeq \mathcal{F}(1) \succeq \mathcal{F}(F(1)) \succeq \dots$ lánc legkisebb eleme.) Tarski az 1.7. Tétel alkalmazását végtelen hálókon különféle középértéktételek levezetésével illusztrálta. A másik jól ismert alkalmazás, a Cantor-Bernstein tétel bizonyítása szintén végtelen hálók segítségével történik. Azonban az 1.7. Tételnek már véges hálókon is izgalmas következményei vannak.

1.8. <u>Következmény</u> (Fleiner [11]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvények, akkor találhatók az E-nek olyan X, Y részhalmazai, melyre $Y = \mathcal{D}_\mathcal{F}(X)$ és $X = \mathcal{D}_\mathcal{G}(Y)$ teljesül, ahol $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ ill. $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ az $\mathcal{F}$ ill. a $\mathcal{G}$ egy-egy antiton determinánsa. Továbbá az ilyen tulajdonságú (X, Y) párok hálót alkotnak a $\preceq$ rendezésre, ahol $(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2)$, ha $X_1 \subseteq X_2$ és $Y_2 \subseteq Y_1$.*

Az 1.8. Következmény motiválja az alábbi definíciót.

1.9. Definíció *Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvények. Az E alaphalmaz K részhalmazát $\mathcal{F}\mathcal{G}$-*kernelnek* nevezzük, ha léteznek olyan $X, Y \subseteq E$ halmazok valamint az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{G}$-nek olyan $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ antiton determinánsai, amelyekre*

$$K = X \cap Y,\ Y = \mathcal{D}_\mathcal{F}(X) \text{ és } X = \mathcal{D}_\mathcal{G}(Y) \tag{1.2}$$

teljesül.

Az 1.9. Definícióban szereplő antiton determinánsok bár általában sokféleképp választhatók, útfüggetlen kiválasztási függvények esetén nem játszanak lényeges szerepet a definícióban. Ezt mutatja az alábbi lemma.

1.10. $\boxed{\text{Lemma}}$ (Fleiner [11]) *Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ útfüggetlen és komonoton kiválasztási függvények, K egy $\mathcal{F}\mathcal{G}$-kernel, $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ pedig az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ tetszőleges, az (1.1) tulajdonsággal rendelkező antiton determinánsai. Ekkor léteznek olyan X, Y részhalmazai E-nek, amelyre (1.2) teljesül.*

Az 1.6. és az 1.10. Lemmák miatt útfüggetlen kiválasztási függvényekre az 1.8. Következmény megfogalmazható a determinánstól független módon az alábbiak szerint.

1.11. Következmény (Fleiner [11]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ útfüggetlen, komonoton kiválasztási függvények, akkor létezik $\mathcal{FG}$-kernel, továbbá az $\mathcal{FG}$-kernelek hálót alkotnak arra a $\preceq_\mathcal{F}$ részbenrendezésre, amire $X \preceq_\mathcal{F} Y$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{F}(X \cup Y) = X$. Ráadásul az $\mathcal{FG}$-kerneleken a $\preceq_\mathcal{F}$ részbenrendezés pontosan a fordítottja a $\preceq_\mathcal{G}$ részbenrendezésnek.*

Ha a fentieken túl az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kiválasztási függvények növekedők is, akkor tetszőleges K_1, K_2 $\mathcal{FG}$-kernelek esetén $K_1 \vee K_2 := \mathcal{F}(K_1 \cup K_2)$ és $K_1 \wedge K_2 := \mathcal{G}(K_1 \cup K_2)$ szintén $\mathcal{FG}$-kernelek, továbbá

$$\chi(K_1) + \chi(K_2) = \chi(K_1 \vee K_2) + \chi(K_1 \wedge K_2) \tag{1.3}$$

teljesül ezen kernelek karakterisztikus függvényeire.

Illusztrációként álljon itt egy példa az 1.11. Következmény kernel létezéséről szóló részének alkalmazására.

1.12. Példa (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2007, 3. feladat) *Legyen H a sík rácspontjainak tetszőleges véges halmaza. Ekkor létezik olyan K részhalmaz, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

1. *a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K-t legfeljebb 2 pontban metszi,*
2. *$H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K-beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.*

Az 1.4. Megfigyelésből és az 1.8. Következményből azonnal adódik Gale és Shapely 1.1. tétele. Ennél azonban több is látszik. Az 1.4. Megfigyelés miatt a stabil párosítások megegyeznek az $\mathcal{F}_F\mathcal{F}_L$-kernelekkel, amelyek pedig egy monoton leképezés fixpontjaival azonosak. Az 1.7. Tétel miatt a fixpontok teljes hálót alkotnak, így van a fixpontok között legkisebb és legnagyobb is. Innen közvetlenül adódik, hogy a stabil párosítások között van fiú-optimális (amelyben minden fiú a legjobb olyan partnert kapja, amelyet stabil párosításban megkaphat és egyúttal minden lány a lehetséges legrosszabb stabil partnerrel van párosítva), és lány-optimális is (amely szerepcserével definiálható). Az is kiderül, hogy a Gale-Shapley algoritmus tekinthető az imént említett monoton függvény iterációjának (ami –mint láttuk– a legkisebb ill. legnagyobb fixpontot találja meg). Blair hálótulajdonságról szóló eredményét sem nehéz igazolni az 1.11. Következmény felhasználásával.

1.13. Tétel (Blair [8]) *Legyen $G = (V, E)$ egy F és L színosztályokkal rendelkező páros gráf, és legyen $\mathcal{F}_v : 2^{E(v)} \to 2^{E(v)}$ IRC tulajdonságú, komonoton kiválasztási függvény minden $v \in V$ csúcsra. Legyen $\mathcal{F}_F(X) := \bigcup\{\mathcal{F}_v(X \cap E(v) : v \in F\}$ és $\mathcal{F}_L(X) := \bigcup\{\mathcal{F}_v(X \cap E(v) : v \in L\}$. Ekkor az $\mathcal{F}_F\mathcal{F}_L$-kernelek (teljes) hálót alkotnak a $\preceq_B$ részbenrendezésre nézve, ahol $X \preceq_F Y$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{F}_L(X \cap Y) = X$.*

Érdemes megemlíteni, hogy az 1.11. Következmény és a Tarski-féle 1.7. fixponttétellel való kapcsolat újrafelfedezése áll Hatfield és Milgrom sokat hivatkozott, úttörő munkájának középpontjában [28].

2. fejezet

Kernel-típusú eredmények

A Bevezetésben leírt fixpont-alapú megközelítés segítségével számos korábbi eredményt kiterjeszthetünk ill. általánosíthatunk. A $P_1 = (E, \leq_1)$ és $P_2 = (E, \leq_2)$ véges posetek K közös antiláncát *P_1P_2-kernelnek* mondjuk, ha bármely $e \in E$ elemre van olyan $k \in K$ elem, amelyre $e \leq_1 k$ vagy $e \leq_2 k$ teljesül. Sands Sauer és Woodrow [46] eredményéből könnyen levezethető Gale és Shapley 1.1. Tétele alábbi általánosításának első része. (Igaz továbbá az is, hogy a Sands Sauer Woodrow tétel igazolható a 2.1. Tétel első részének következményeként.)

2.1. Tétel (Fleiner [11]) *Tetszőleges $P_1 = (E, \leq_1)$ és $P_2 = (E, \leq_2)$ véges posetek esetén létezik P_1P_2-kernel. Továbbá, a P_1P_2-kernelek hálót alkotnak arra a $\prec_1$ rendezésre nézve, ahol $A \prec_1 A'$ pontosan akkor teljesül két P_1-beli antiláncra, ha A minden elemének van A'-beli felső korlátja.*

A 2.1. tétel azon múlik, hogy a részhalmazhoz annak maximumait rendelő leképezés komonoton útfüggetlen kiválasztási függvény. A 2.1. Tétel első részét illusztrálja az alábbi példa.

2.2. Példa (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2016, 2. feladat) *A pozitív egész számok tetszőleges véges A halmazának van olyan B részhalmaza, amelyre fennáll az alábbi két feltétel.*

- *Ha b_1 és b_2 a B különböző elemei, akkor sem b_1 és b_2, sem pedig $b_1 + 1$ és $b_2 + 1$ nem egymás többszörösei, továbbá*
- *az A halmaz tetszőleges a eleméhez van B-nek olyan b eleme, amelyre a osztója b-nek vagy $(b + 1)$ osztója $(a + 1)$-nek.*

Aharoni, Berger és Gorelik igazolták a 2.1. tétel egy súlyozott változatát, melynek kimondásához néhány definícióra van szükség. Legyen $P = (V, \leq)$ véges poset és $w : V \to \mathbb{N}$ egy igényfüggvény, $f : V \to \mathbb{N}$ pedig egy súlyfüggvény. Tetszőleges $v \in V$ esetén legyen $f^{\uparrow}_{\leq}(v) = \max\{f(c_1) + f(c_2) + \ldots : v = c_1 < c_2 < \ldots\}$ a v-ből induló láncok összsúlyának maximuma. A fenti f súlyfüggvény *$(\leq, w)$-független*, ha

- bármely $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ lánc esetén $\sum_{i=1}^{k} f(c_i) \leq \max\{w(c_i) : 1 \leq i \leq k\}$ teljesül és
- bármely $v \in V$ esetén $f(v) \cdot f^{\uparrow}_{\leq}(v) \leq f(v) \cdot w(v)$ áll fenn.

(Az első feltétel azt jelenti, hogy egyetlen lánc összsúlya sem haladja meg a lánc elemeinek maximális igényét, míg a második szerint pozitív súlyú v elemből induló lánc összsúlya nem haladhatja meg v igényét.) Könnyen látható, hogy az $(\leq, 1)$-független súlyfüggvények pontosan az antiláncok karakterisztikus vektorai.

A fenti f súlyfüggvény w-*dominálja* a P poset c_1 elemét, ha létezik olyan $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ lánc, amelyre $w(c_1) \leq \sum_{i=1}^{k} f(c_i)$ teljesül, azaz van olyan c_1-ből induló lánc, melynek összsúlya eléri c_1 igényét. Legyenek most $P_1 = (V, \leq_1)$ és $P_2 = (V, \leq_2)$ a V közös alaphalmazon két véges poset, és legyen $w_1, w_2 : V \to \mathbb{N}$ két igényfüggvény. E posetek (w_1, w_2)-*kernelén* olyan $f : V \to \mathbb{N}$ súlyfüggvényt értünk, amely egyszerre $(\leq_1, w_1)$-független és $(\leq_2, w_2)$-független, valamint$f$ a V alaphalmaz minden v elemét P_1-ben w_1-dominálja vagy P_2-ben w_2-dominálja. Érdemes megfigyelni, hogy az $(1, 1)$-kernel épp a korábban definiált kernellel esik egybe. Immár kimondhatjuk a korábbban említett súlyozott kernelekről szóló tételt.

2.3. Tétel (Aharoni, Berger, Gorelik [2]) *Legyenek $P_1 = (V, \leq_1)$ és $P_2 = (V, \leq_2)$ véges posetek, és legyen $w : V \to \mathbb{N}$ egy igényfüggvény. Ekkor e poseteknek létezik (w, w)-kernele.*

Az 1.7. Tétel az 1.8. Következményének hálókra történő kiterjesztésével és alkalmas hálók megfelelő kiválasztási függvényeit definiálva a 2.3. Tétel általánosítható az alábbiak szerint.

2.4. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ (Fleiner, Jankó [20]) *Legyenek $P_1 = (V, \leq_1)$ és $P_2 = (V, \leq_2)$ véges posetek, és legyen $w_1 : V \to \mathbb{N}$ és $w_2 : V \to \mathbb{N}$ igényfüggvények. Ekkor e poseteknek létezik (w_1, w_2)-kernele. A (w_1, w_2)-kernelek hálót alkotnak a súlyfüggvények azon $\preceq_1$ részbenrendezésére, amelyre $f \preceq_1 g$ akkor áll, ha $f^{\uparrow}_{\leq_1} \leq g^{\uparrow}_{\leq_1}$.*

Részbenrendezéseken kívül más struktúrákon is igazolhatók kernel-típusú eredmények. Legyenek $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroidok, valamint $\leq_1$ és $\leq_2$ a közös E alaphalmazuk lineáris rendezései. E két matroid közös K függetlenjét $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-*kernelnek* nevezzük, ha tetszőleges $e \in E \setminus K$ elemhez valamely $i \in \{1, 2\}$-re létezik az $\mathcal{M}_i$ matroidnak olyan C köre, amelyre $C \subseteq K \cup \{e\}$ és $c \leq_i e$ teljesül minden $c \in C - e$-re.

2.5. <u>Tétel</u> (Fleiner [11]) *Tetszőleges $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroidok esetén létezik $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel. Ha $K_1, K_2 \subseteq E$ $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelek, akkor a $K_1 \cup K_2$ halmazból a $\leq_i$ szerint $\mathcal{M}_i$-n futtatott mohó algoritmus $i = 1, 2$ esetén $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelt választ ki. E két operáció meghatározta műveletek az $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelek halmazán olyan hálót definiálnak, amelyben érvényes az (1.3) tulajdonság, továbbá tetszőleges K_1, K_2 $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelekre fennáll, hogy $span_{\mathcal{M}_1} K_1 = span_{\mathcal{M}_1} K_2$ és $span_{\mathcal{M}_2} K_1 = span_{\mathcal{M}_2} K_2$.*

A 2.5. Tétel kulcsa az 1.11. Következmény mellett az, hogy a matroid részhalmazán futtatott mohó algoritmussal meghatározott kiválasztási függvény egyszerre komonoton és növekedő.

3. fejezet

Kernelek struktúrája

Ebben a fejezetben különféle $\mathcal{FG}$-kerneleknek struktúráját vizsgáljuk. Az 1.11. Következmény második részének a hálótulajdonságon túl egy másik következménye az, hogy $\mathcal{FG}$-kernelek hatékonyan kikeresztezhetők.

3.1. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner [11])** *Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ növekedő, útfüggetlen és komonoton kiválasztási függvények és legyenek $K_1, K_2, \ldots, K_m$ tetszőleges $\mathcal{FG}$-kernelek. Ekkor létezik $\mathcal{FG}$-kernelek egy $K^1 \preceq_{\mathcal{F}} K^2 \preceq_{\mathcal{F}} \ldots \preceq_{\mathcal{F}} K^m$ lánca, amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^m \chi(K_i) = \sum_{i=1}^m \chi(K^i)$, továbbá, hogy $1 \le j \le m$-re $K^j = \mathcal{F}(supp(\sum_{i=1}^m \chi(K_i) - \sum_{i=1}^{j-1} \chi(K^i)))$.*

Stabil b-párosítások esetén a 3.1. Tétel különösen egyszerű alakot ölt, ám ehhez hasznos ismerni a Roth-Sotomayor-féle összehasonlítási tételnek (Comparability Theorem) [43] Baïou és Balinski által adott alábbi általánosítását.

3.2. Tétel (Baïou és Balinski [4]) *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Ha S_1 és S_2 stabil párosítások és $v \in V$, akkor az alábbi két lehetőség valamelyike áll fenn.*

- *$S_1(v) = S_2(v)$ vagy*
- *$|S_1(v)| = |S_2(v)| = b(v)$ és $S_1(v) \cup S_2(v)$ halmaz $\preceq_v$ szerint legjobb $b(v)$ eleme vagy $S_1(v)$ vagy $S_2(v)$.*

A 3.2. egy következménye, hogy bárhogy is adunk meg k stabil b-párosítást és egy v csúcsot, a b-párosítások v-re illeszkedő élhalmazain v-nek lineáris rendezése van, amit a továbbiakban (mivel nem okoz félreértést) szintén $\preceq_v$-vel jelölünk. Stabil b-párosításokra tehát az alábbi állítás szerint érvényes, hogy ha a egy páros gráf k megadott stabil b-párosításából az egyik színosztályából mindenki a számára i-dik legjobb hozzárendelést választja, akkor stabil b-párosítást kapunk.

3.3. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner [10])** *Legyen $G = (V, E)$ egy B és G színosztályokkal rendelkező páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Legyenek $S_1, S_2, \ldots, S_k$ stabil b-párosítások, és legyen $1 \le i \le k$. Jelölje az $S_1(v), S_2(v), \ldots, S_k(v)$ élhalmazok $\preceq_v$ szerinti sorrendjét $S^1(v), S^2(v), \ldots, S^k(v)$. Ekkor $S^i := \bigcup\{S^i(v) : v \in B\}$ stabil b-párosítás.*

A fenti 3.3. Tételt stabil párosítások esetére Teo és Sethuraman lineáris programozási eszközök felhasználásával igazolták [50], majd Klaus és Klijn (állításuk szerint a 3.3. Tételt nem ismerve) adtak a miénkhez nagyon hasonló rövid bizonyítást egy speciális esetben [35].

Stabil b-párosításoknak van egy kevésbé ismert, ám rendkívül hasznos, ú.n. splitting tulajdonsága, ami például a stabil b-párosítás poliéder lineáris leírásához jön kapóra.

3.4. Tétel (Fleiner [12]) *Legyen a $G = (V, E)$ véges gráf minden v csúcsához megadva egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Ekkor minden $v \in V$ csúcsra létezik egy olyan $E(v) = E_1(v) \cup \ldots \cup E_{b(v)}(v)$ partíció, melyre $|E_i(v) \cap S| \leq 1$ teljesül tetszőleges S stabil b-párosításra, v csúcsra és $1 \leq i \leq b(v)$ indexre.*

A 3.4. Tételből igazolható, hogy tetszőleges csúcspreferenciákkal és csúcskorlátokkal ellátott G gráfhoz létezik egy olyan G' gráf, amelyből G megkapható bizonyos csúcshalmazok összeolvasztásával és G minden stabil b-párosítása a G' egy stabil párosításnak felel meg. Bár e G' gráf hatékonyan előállítható G, a $\preceq_v$ preferenciák és a b csúcskorlátok ismeretében, ez a megfigyelés sajnos nem alkalmas arra, hogy a stabil b-párosítás keresését stabil párosítás keresésére vezessük vissza. Nem igaz ugyanis, hogy G' minden stabil párosítása G egy stabil b-párosításából adódik.

4. fejezet

Alkalmazások

Ebben a fejezetben a stabil párosításokról szóló, ismert és kevésbé ismert tételek néhány alkalmazását mutatjuk be. Viszonylag könnyen látható, hogy a Tarski-féle fixponttétel egyik sztenderd alkalmazása, a Cantor-Bernstein tétel levezethető a (szintén a Tarski-féle fixponttétellel bizonyítható) stabil párosítás tétel végtelen változatából. Mivel a Cantor-Bernstein tétel tekinthető a Menelsohn-Dulmage tétel végtelen változatának, nem meglepő, hogy ez utóbbi is igazolható stabil párosításokkal. A Mendelsohn-Dulmage tétel matroidos általánosítása, a Kundu-Lawler tétel pedig könnyen bizonyítható a matroid-kernelekre vonatkozó 2.5. Tételből. Korábban említettük, hogy az alábbi, gráfkernelekről szóló eredmény is levezethető Tarski-féle fixponttétel segítségével.

4.1. Tétel (Sands, Saurer és Woodrow [46]) *Ha E_1 és E_2 két hurokélt nem tartalmazó irányított élhalmaz a V ponthalmazon, akkor létezik a V pontjainak olyan U részhalmaza, melyre teljesül az alábbi két tulajdonság*

- *Két különböző U-beli csúcs között nem vezet sem E_1-beli, sem E_2-beli út, illetve*
- *bármely $v \in V \setminus U$ csúcsból vezet U-beli csúcsba E_1-beli vagy E_2-beli út.*

A Gale-Shapley tétel egy talán kevésbé kézenfekvő alkalmazása Pym alábbi linking tételének bizonyítása.

4.2. Tétel (Pym [40]) *Legyen a $D = (V, E)$ digráfban $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ pontdiszjunkt irányított utak egy-egy halmaza. Ekkor létezik pontdiszjunkt irányított utak egy $\mathcal{R}$ halmaza úgy, hogy*

- *minden $\mathcal{P}$-beli út kiindulópontjából indul $\mathcal{R}$-beli út, és minden $\mathcal{R}$-beli út kiindulópontja kiindulópontja egy $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{Q}$-beli útnak, és*
- *minden $\mathcal{Q}$-beli út végpontjában végződik $\mathcal{R}$-beli út, és minden $\mathcal{R}$-beli út végpontja végpontja egy $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{Q}$-beli útnak, valamint*
- *minden $\mathcal{R}$-beli út egy $\mathcal{P}$-beli út (esetleg üres) kezdőszeletének és egy $\mathcal{Q}$-beli út (esetleg üres) végszeletének összefűzésével jön létre.*

Stabil párosítások egyik legismertebb alkalmazása Galvinnak a Dinitz-sejtésre adott bizonyítása [23], mely a „Proofs from the book” című könyvben is megjelent. Galvin módszere az alábbi módon terjeszthető ki nem páros gráfokra.

4.3. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner [15])** *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pedig G egy k-élszínezése. Legyen adott minden $e \in E$ élhez egy k méretű $L(e)$ színlista. Ha G egyetlen páratlan körének éleihez tartozó színlistáknak sincs közös eleme, akkor van G-nek olyan l élszínezése, amelyre minden élt a saját listájából színezünk, azaz $l(e) \in L(e)$ teljesül G minden e élére.*

Létezik Galvin tételének és a páros gráfok egyenletes színezéséről szóló tételnek is egy közös általánosítása.

4.4. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner, Frank [17])** *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pedig G éleinek egy tetszőleges színezése k színnel. Adott továbbá minden $e \in E$ élhez egy k méretű $L(e)$ színlista. Ekkor található G minden e éléhez egy $l(e) \in L(e)$ szín úgy, hogy az l színezés az alábbi értelemben jobb legyen a c színezésnél. A G bármely v csúcsára és bármely $n_1, n_2, \ldots, n_i$ színre léteznek $m_1, m_2, \ldots, m_j$ színek valamely $j \le i$-re úgy, hogy a v-ből a c színezés szerint legalább annyi él kapja meg az $m_1, \ldots, m_j$ színek valamelyikét, mint ahány v-ből induló él az l színezés szerint az $n_1, \ldots, n_i$ színek valemelyikét kapja.*

A matroidkerneleknek egy gyakorlati szempontból is érdekes alkalmazásával zárjuk ezt a részt. Ehhez definiáljuk a 2LCSM problémát (a rövidítés a szakirodalomban használt 2-sided laminar classified stable matching megnevezésre utal). Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, melynek minden v csúcsához adott egy $\preceq_v$ lineáris rendezés $E(v)$-n, egy $\mathcal{C}_v$ lamináris halmazrendszer $E(v)$-n, valamint minden $C \in \mathcal{C}_v$ halmazra az $l(C) \le u(C)$ alsó és felső korlátok. A G éleinek M részhalmaza akkor *lu-párosítás*, ha $l(C) \le |M \cap C| \le u(C)$ teljesül minden v csúcsra és $C \in \mathcal{C}_v$ halmazra. Az M lu-párosítás akkor *lu-dominálja* az $e \in E \setminus M$ élt, ha van e-nek olyan v végpontja és olyan $C \in \mathcal{C}_v$ halmaz, amelyre $|M \cap C| = u(C)$ és $m \preceq_v e$ teljesül minden $m \in M \cap C$ esetén. Az M lu-párosítás pedig akkor *lu-stabil*, ha minden $E \setminus M$-beli élt lu-dominál. A 2LCSM probléma pedig az lu-stabil párosítás létezésének eldöntése. Ezzel a megközelítéssel általánosíthatjuk a Huang által bevezetett LCSM problémát [30], melynek motivációja az egyetemi felvételi probléma egy, a gyakorlatot jobban közelítő leírása: szemben ugyanis a stabil b-párosítás problémával, a jelen modell kezelni tudja az olyasfajta feltételt is, amely szerint az egyes egyetemi szakok csak bizonyos minimális létszám elérésekor indulhatnak el, ill. bizonyos egyetemi szakok (a saját egyéni kvótájukon túl) közös kvótával is rendelkeznek. A 2LCSM probléma egy lehetséges megoldása az alábbi eredmény alapján történhet.

4.5. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner, Kamiyama [21])** *A $G = (V, E)$ gráfon megadott 2LCSM problémához polinom időben konstruálhatók az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ matroidok azzal a tulajdonsággal, hogy ha létezik lu-stabil párosítás, akkor az lu-stabil párosítások halmaza megegyezik az $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelek halmazával. Igaz továbbá, hogy egy M $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel pontosan akkor lu-stabil párosítás, ha M lu-párosítás.*

A 4.5. Tétel szerint tehát elegendő egyetlen M $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelt találni: ha M lu-párosítás, akkor kész vagyunk, hisz M lu-stabil, ha pedig M nem lu-párosítás, akkor egyáltalán nem létezik lu-stabil párosítás.

Érdemes megemlíteni két további, az egyetemi felvételi problémához kapcsolódó modellt is. A $G = (V, E)$ páros gráf színosztályait a szakok A és a felvételizők B halmaza alkotja. Minden v csúcshoz adott egy $\preceq_v$ lineáris rendezés az v-ból induló éleken, továbbá minden b szakhoz adott egy $l(b)$ alsó és egy $u(b)$ felső korlát. *Felvételi séma* alatt olyan $M \subseteq E$ élhalmazt értünk, amelyre $|M(a)| \leq 1$ teljesül minden $a \in A$ jelentkezőre és $l(b) \leq M(b) \leq u(b)$ áll minden olyan b szakra, amelyre $M(b) \neq \emptyset$. (A motiváció itt az, hogy ha egy b szak elindul, akkor ehhez legalább $l(b)$ hallgatóra van szükség.) Egy felvételi séma akkor *stabil*, ha

- egyrészt nincs blokkoló felvételiző-szak pár, azaz bármely $a \in A$, $b \in B$ és $M(b) \neq \emptyset$ esetén van olyan $m \in M$ él, amelyre $m \preceq_a ab$ teljesül vagy $|M(b)| = u(b)$ és $m \preceq_b ab$ teljesül minden $m \in M(b)$-re,
- továbbá nincs blokkoló koalíció sem, azaz nem létezik olyan b szak és olyan $a_1, a_2, \ldots,$ $a_{l(b)}$ hallgatók, amelyre $M(b) = \emptyset$ és $a_i b \preceq_{a_i} M(a_i)$ teljesül.

4.6. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Biró, Fleiner, Irving, Manlove [7])** *A stabil felvételi séma létezésének eldöntése NP-teljes a fenti modellben.*

A másik fent említett modell azt a gyakorlatban is előforduló követelményt igyekszik formalizálni, amely szerint bizonyos jól meghatározott szakokra felvett jelentkezők számara felső korlátot határoz meg a minisztérium. A $G = (V, E)$ páros gráf színosztályait most is a szakok A és a felvételizők B halmaza alkotja. Minden a felvételizőhöz adott egy $\preceq_a$ lineáris rendezés az a-ból induló éleken, míg a szakokon mint alaphalmazon halmazán adott a $\mathcal{C}$ halmazcsalád, melynek tagjai az ún. kvótahalmazok. Minden $C \in \mathcal{C}$ kvótahalmazhoz adott egy $q(C)$ felső korlát. *Felvételi séma* alatt itt olyan $M \subseteq E$ élhalmazt értünk, amelyre $|M(a)| \leq 1$ teljesül minden $a \in A$ jelentkezőre és $l(C) \leq |M(C)| \leq u(C)$ áll minden C kvótahalmazra, ahol $M(C)$ jelöli az C-beli végponttal rendelkező élek halmazát. Minden C kvótahalmazhoz adott $M(C)$-n a $\preceq_C$ lineáris rendezés, amelyek egymással konzisztensek, azaz tetszőleges C és C' kvótahalmazok esetén $\preceq_C$ és $\preceq_{C'}$ megegyezik $M(C) \cap M(C')$-n. Egy felvételi séma akkor *stabil*, ha bármely $a \in A$ felvételiző és $b \in B$ szak esetén $M(a) \preceq_a ab$ teljesül vagy van olyan $b \in C \in \mathcal{C}$ kvótahalmaz, amelyre $|M(C)| = q(c)$ és $m \preceq_C ab$ áll minden $m \in M(C)$ esetén. Világos, hogy ha a kvótahalmazok $\mathcal{C}$ rendszere lamináris, akkor a 2LCSM probléma azon speciális esetéről van szó, amelyben $l \equiv 0$ és $u \equiv q$. Mivel ekkor minden $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel lu-párosítás, ezért minden ilyen kernel egyúttal lu-stabil is lesz, tehát mindig található stabil felvételi séma. Ha azonban a $\mathcal{C}$ halmazrendszer nem lamináris, akkor a probléma reménytelen.

4.7. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Biró, Fleiner, Irving, Manlove [7])** *A stabil felvételi séma létezésének eldöntése NP-teljes a fenti modellben.*

5. fejezet

Stabil párosítás poliéderek

Természetes kérdés a stabil párosítás és a maximális súlyú párosítás keresésének az az ötvözete, amelyben adott élsúlyozás mellett kell a stabil párosítások halmazából egy egy maximális súlyút keresni. Egy természetesen kínálkozó út a stabil párosítások karakterisztikus vektorai feszítette politópon történő optimalizálás, és ehhez ennek a politópnak egy jó karakterizációjára, tipikusan egy lineáris leírására van szükség. Az első lépést Vande Vate tette meg azzal, hogy teljes páros gráf esetén megadott egy ilyen leírást [51]. Ezt követte Rothblum, aki tetszőleges páros gráfra adott karakterizációt [45], majd Baïou és Balinski adták meg páros gráf esetén a stabil b-párosítás politóp exponenciálisan sok feltételt tartalmazó leírását abban az esetben, amikoris a b korlát az egyik színosztályon azonosan 1-gyel egyenlő [5].

Az $\mathcal{FG}$-kernelek hálóstruktúrájának ismeretében azonban az előbbieknél sokkal általánosabb esetekben (például matroidkernelek esetében) is megadható lineáris karakterizáció, mégpedig Hoffman hálópoliéderekre igazolt tételeinek segítségével [29]. Néhány jelölésre lesz szükségünk. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ kiválasztási függvények esetén jelölje $\mathcal{K}_{\mathcal{FG}}$ az $\mathcal{FG}$-kernelek halmazát, ill.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} &:= conv\{\chi(K) : K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\} \\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\uparrow} &:= \mathcal{P}_{\mathcal{FG}} + \mathbb{R}^E_+ \\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\downarrow} &:= (\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} + \mathbb{R}^E_-) \cap \mathbb{R}^E_+ \\
\mathcal{A}_{\mathcal{FG}} &:= \{A \subseteq E : |A \cap K| \leq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\} \\
\mathcal{B}_{\mathcal{FG}} &:= \{B \subseteq E : |B \cap K| \geq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\}
\end{aligned}$$

rendre az $\mathcal{FG}$-kernel politópot, annak felszálló burkát, a pozitív ortánsban alatta levő részt, az $\mathcal{FG}$-kernelek antiblokkoló, valamint blokkoló halmazait. Egy $x \in \mathbb{R}^E$ vektor és $Z \subseteq E$ esetén alkalmazzuk az

$$\widetilde{x}(Z) := \sum\{x(z) : z \in Z\}$$

jelölést. Ennek segítségével ki tudjuk mondani az alábbi eredményt.

5.1. <u>Tétel</u> (Fleiner [11]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ növekedő és komonoton kiválasztási függ-*

vények, akkor

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\uparrow} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(B) \geq 1 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{FG}}\} \\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\downarrow} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{FG}}, \quad x(e) = 0 \quad \forall e \in E \setminus \bigcup \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\} \\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(B) \geq 1 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{FG}}, \quad \widetilde{x}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{FG}}\}
\end{aligned}
$$

Az 5.1. Tételben szereplő lineáris feltételek egy előnye, hogy a megfelelő lineáris programozási problémában fellépő mátrixokban csak 0 és 1 szerepel. Hátrányuk azonban, hogy a lineáris feltételek implicitek, és akár exponenciálisan sok is lehet belőlük. Mindazonáltal a szeparációs probléma könnyen megoldható, így sztenderd technikák alkalmazhatók az adott poliédereken történő optimalizációra. Stabil b-párosítások esetén azonban a 3.4. Tétel segítségével jóval konkrétabban megadhatók a politópot leíró blokkerek és antiblokkerek.

5.2. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner** [12]**)** *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés $E(v)$-n, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Jelölje $\mathcal{P}(G, b)$ a G-beli stabil b-párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burkát, valamint $1 \leq i \leq b(v)$ esetén $E_i(v)$ jelölje az $E(v)$ a 3.4. Tétel szerinti részhalmazát. Ekkor*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(G, b) = \{x \in \mathbb{R}^E : \quad & x \geq 0, \\
& \widetilde{x}(E_i(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad \forall 1 \leq i \leq b(v), \\
& \widetilde{x}(\Phi_{i,j}(uv)) \geq 1 \quad \forall uv \in E \quad \forall 1 \leq i \leq b(u), \quad \forall 1 \leq j \leq b(v)\}\ ,
\end{aligned}
$$

ahol $\Phi_{i,j}(uv) = \{uv\} \cup \{uv' \in E_i(u) : uv' \preceq_u uv\} \cup \{u'v \in E_j(v) : u'v \preceq_v uv\}$.

Érdemes megemlíteni, hogy $b \equiv \mathbf{1}$ esetén az 5.2. Tétel speciális esete a $\mathcal{P}(G, \mathbf{1})$ stabil párosítás poliéder Rothblum általi karakterizációja [45], melyről Király és Pap igazolták annak teljesen duálisan egészértékű (TDI) tulajdonságát [33]. Abban a speciális esetben, aholis a $b \equiv \mathbf{1}$ tulajdonság csak a páros gráf egyik színosztályára teljesül, Baïou és Balinski adták meg $\mathcal{P}(G, b)$ egy viszonylag bonyolult, exponenciálisan sok feltételt tartalmazó, lineáris leírását [5].

6. fejezet

Stabil folyamok

Jól ismert tény, hogy páros gráfban a maximális méretű párosítás keresése megfogalmazható folyamproblémaként: vezessünk be egy-egy új s és t csúcsot, s-ből vezessünk élt az egyik (mondjuk A) színosztály minden csúcsába, míg a másik színosztály (mondjuk B) minden csúcsából indítsunk élt t-be, valamint az páros gráf minden élét irányítsuk A-ból B-be. Ha az így kapott irányított gráf minden élének 1 kapacitást adunk, akkor az eredeti páros gráf párosításai úgy felelnek meg kölcsönösen egyértelműen az utóbbi hálózatbeli egészfolyamoknak, hogy a párosítás mérete megegyezik a hozzá tartozó folyam nagyságával. A maximális párosítás keresése tehát maximális nagyságú egészfolyam keresésére vezet, ami jól ismert feladat.

Természetes kérdés, hogy nincs-e vajon a hálózati folyamoknak olyan általánosítása, amelynek a stabil párosítás feladat hasonlóképpen speciális esete, mint ahogyan a maximális párosítás probléma a szokásos folyamproblémának. A kérdésre igenlő a válasz, ennek részleteit ismertetjük az alábbiakban.

Legyen (D, s, t, c) egy hálózat, azaz D irányított gráf (röviden digráf), s, t ennek különböző csúcsai (ún. termináljai), valamint $c : A(D) \to \mathbb{R}_+$ pedig egy nemnegatív kapacitásfüggvény D élein. A megszokott módon (megengedett) folyam alatt olyan $f : A(D) \to \mathbb{R}_+$ függvényt értünk, amelyre a kapacitásfeltétel (azaz $f \leq c$) mellett a Kirchhoff-szabály is teljesül, azaz minden s-től és v-től különböző v csúcs esetén a v-be belépő éleken az f által felvett értékek összege megegyezik a v-ből kilépő éleken vett összeggel. Tegyük fel továbbá, hogy $\preceq_v$ a v-re illeszkedő irányított élek halmazán egy lineáris rendezés, azaz ha $e \preceq_v f$, akkor a v csúcs jobban szereti e-t az f-nél. (Valójában csak a v-ből kilépő és a v-be belépő éleken kell egy-egy rendezés, mert kiélpő és belépő élt sosem kell összehasonlítani.) Azt mondjuk, hogy egy $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_k, e_k, v_{k+1}$ séta *blokkolja* az f folyamot, ha

- $e_i = v_i v_{i+1}$ teljesül minden $1 \leq i \leq k$ esetén,
- az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élek páronként különbözők,
- $f(e_i) < c(e_i)$ teljesül minden $1 \leq i \leq k$ esetén (azaz e_i telítetlen),
- $v_1 \in \{s, t\}$ vagy létezik olyan $e = v_1 x$ él, amelyre $f(e) > 0$ és $e_1 \prec_{v_1} e$, valamint
- $v_{k+1} \in \{s, t\}$ vagy létezik olyan $e = x v_{k+1}$ él, amelyre $f(e) > 0$ és $e_k \prec_{v_{k+1}} e$.

Az f megengedett folyamot *stabilnak* mondjuk, ha f-et egyetelen séta sem blokkolja. Az imént leírt modell az alábbi módon motiválható. A D digráf nemterminális csúcsai kereskedőknek felelnek meg, akik egyfajta terméket adnak-vesznek. Az egyes irányított élek a lehetséges adásvételeket jelentik, az él kapacitása pedig azt írja le, hogy az adott termékből legfeljebb mennyivel kereskedhet a két érintett játékos. Az így megadott piacon létrejövő mozgást egy megengedett folyam írja le, hisz minden kereskedő pontosan annyi terméket tud eladni, mint amennyit megvesz. Ha az u kereskedő az uv élt választja az uw éllel szemben (azaz ha $uv \prec_u uw$ áll), akkor az azt jelenti, hogy u szívesebben ad el v-nek, mint w-nek, így ha megteheti, akkor szívesen csökkenti a w-nek eladott mennyiséget annak érdekében, hogy pontosan ennyivel többet tudjon eladni v-nek. Persze erre csak akkor van lehetőség, ha v az így szerzett többletet tovább tudja adni, sít. Az f-et blokkoló séta ebben az értelmezésben azt jelenti, hogy a séta két vége szívesebben terelné át az általa forgalmazott termékek egy részét a sétára, míg a séta közbülső csúcsai is jobban járnak, ha több terméket forgalmaznak. Egy blokkoló séta tehát az f folyam által leírt kereskedésben egyfajta instabilitást okoz, hiszen minden érintett résztvevőnek érdekében áll a blokkoló séta által megadott módon eltérni f-től. A stabil folyam tehát egy olyan szituációt ír le, amelytől nem fognak közös akarattal eltérni.

Ha a D digráf egy s forrásból, eladók egy A halmazából, vevők egy B halmazából valamint egy t nyelőből áll, irányított él pedig s-ből A minden csúcsába, B minden csúcsából t-be, valamint bizonyos A és B közti élekből áll, és minden élkapacitás egységnyi, úgy a stabil folyamok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek a stabil párosításoknak abban a G gráfban, amely as s és t csúcsok D-ből való törlésével és az irányítás elhagyásával kapható, a preferenciákat persze megtartva.

6.1. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner [14])** *Tetszőleges (D, s, t, c) hálózatban tetszőleges $\preceq_v$ lineáris csúcspreferenciák esetén létezik stabil folyam.*

Stabil folyam konstruálható a Gale-Shapley algoritmus egy alkalmas általánosával. Ugyanabban a csúcspreferenciákkal ellátott hálózatban akár több stabil folyam is létezhet, de ezek nem alkotnak olyasfajta hálót, mint a stabil párosítások. Valamiféle hálótulajdonság definiálható akkor, ha az egyes stabil folyamok esetén minden egyes csúcsról megállapítjuk, hogy az adott csúcsot eladónak vagy vevőnek tekintjük. (Ez általában egyértelmű, egyes csúcsoknál szabadon választhatunk.) Mindazonáltal a „rural hospital" tételnek ebben a modellben is igaz az alábbi általánosítása.

6.2. $\boxed{\textbf{Tétel}}$ **(Fleiner [14])** *Ha f_1 és f_2 stabil folyamok a (D, s, t, c) hálózatban $\preceq_v$ lineáris csúcspreferenciák mellett, akkor $f_1(e) = f_2(e)$ teljesül minden olyan e élre, amelynek s vagy t végpontja. Következésképp $m_{f_1} = m_{f_2}$, azaz a stabil folyamok nagysága megegyezik.*

A stabil folyam modell szorosan kapcsolódik ellátási láncok Ostrovsky által definiált stabilitásához. Ostrovsky modelljében egy aciklikus gráf csúcsai reprezentálják az egyes játékosokat, az irányított élek pedig az egyes játékosok közötti kereskedelmet jelentik. Minden egyes v csúcshoz adott egy C_v kiválasztási függvény, amely a v csúcsra illeszkedő élek bármely X részhalmazához hozzárendeli az X-nek azt az $Y = C_v(X)$ részhalmazát, amelyek mentén v kereskedne akkor, ha szabadon dönthetne, hogy X-ből mely éleket választja. Mindezen C_v függvényeknek teljesíteniük kell az *SSS* és *CSC* („same side substitutability" ill. „cross side complementarity") tulajdonságokat, ami azt jelenti, hogy ha e belép, f pedig kilép X-ből, akkor

$$C_v^+(X \cup \{e\}) \subseteq C_v^+(X) \cup \{e\} \text{ és } C_v^-(X) \subseteq C_v^-(X \cup \{e\})$$

valamint

$$C_v^-(X \cup \{f\}) \subseteq C_v^-(X) \cup \{f\} \text{ és } C_v^+(X) \subseteq C_v^+(X \cup \{f\})$$

teljesül ahol a $+$ felsőindex a belépő, a $-$ pedig a kilépő éleket jelenti. A fenti tulajdonság tehát azt írja le, hogy ha feltűnik egy új vásárlási lehetőség, akkor az adott játékos minden olyan él mentén elad, ahol eddig is eladott, és minden olyan él mentén nem vásárol, ahol eddig sem vásárolt, de vásárolhatott volna. Egy új eladási lehetőseg esetén pedig az teljesül, hogy minden eddigi megvalósult vásárlás továbbra is megvalósul, és minden meg nem valósult vásárlási lehetőség továbbra sem fog megvalósulni. Egy ellátási láncban a fenti kiválasztási függvényekkel leírt preferenicák esetén egyensúlyi helyzet az élek olyan S részhalmaza, amelyre $C_v(S(v)) = S(v)$ tejesül minden játékos esetén, továbbá nem létezik S-hez *blokkoló lánc*, azaz S-en kívüli élekből olyan irányított P út, amelyre az út minden csúcsa kiválasztaná az út éleit, ha azt S mellé felkínálnák, azaz minden v csúcsra $P(v) \subseteq C_v(S(v) \cup P(v))$ teljesül. Ünnepelt cikkében Ostrovsky az alábbi tételt igazolta.

6.3. Tétel (Ostrovsky [39]) *Tetszőleges aciklikus digráf és a digráf csúcsaihoz tartozó tetszőleges SSS és CSC tulajdonságú kiválasztási függvények esetén létezik egyensúlyi helyzet.*

Ostrovsky munkája és az általa leírt modell nyomán számos új eredmény született (pl. [25, 27, 26]). Ostrovsky modellje jóval általánosabb kiválasztási függvényeket enged meg, mint amit a stabil folyamok esetén használunk, aholis a kapacitásfeltételnek és a Kirchhoff-szabálynak kell megfelelni. A stabil folyamok esetén azonban nem kötjük ki a vizsgált gráf aciklikus tulajdonságát, és a kiválasztási függvénynek sem kell diszkrétnek lennie. A két eredmény egy közös általánosítását tartalmazza Fleiner, Jankó, Tamura és Teytelboym egy egyelőre publikálatlan, hálózatokon értelmezett különféle stabilitásfogalmakat összehasonlító munkája [19].

7. fejezet

Stabil párosítások általános gráfokon

Láttuk, hogy páros gráfok esetén tetszőleges lineáris preferenciák mellett létezik stabil (b-)párosítás. Könnyű olyan nempáros gráfot és preferenciákat megadni, ahol nincs stabil párosítás: egy lehetőség egy páratlan kör, ahol mindenki a jobb oldali szomszédját kedveli jobban. Természetes kérdés tehát, hogy van-e olyan hatékony algoritmus, amely tetszőleges G gráf és lineáris preferenciák esetén eldönti, van-e stabil párosítás, és ha igen, akkor talál egyet. Tekintettel arra, hogy az 1.2. Lemma a nempáros esetben is ervenyes, természetes ötlet, hogy a stabil párosítást kereső algoritmus ebből indul ki. Amíg azonban páros gráfok esetén amennyiben az 1.2. Lemma alapján már nem törölhető több él, akkor a fiúk ill. a lányok legjobb választásai alkotják a fiú- ill. lányoptomális stabil párosítást, ha a vizsgált gráf nem páros, úgy az 1.2. Lemma segítségével elérhető állapot még nagyon messze lehet attól, hogy a stabil párosítás létezését eldönthessük. Az első algoritmust, amely hatékonyan érte el a kitűzött célt, Irving írta le [31]. Ehhez az 1.2. Lemmában szereplő műveleten kívül egy továbbira, az ún. rotáció-eliminációra volt szüksége. Ebben a transzformációban szintén éleket törlünk a vizsgált gráfból, és akárcsak az kikosarazás miatti éltörlés esetén, itt sem keletkezik új stabil párosítás az éltörléskor. Szemben azonban a korábbival, rotáció-eliminációval elveszíthetünk stabil párosítást. A művelet hasznos tulajdonsága azonban az, hogy ha valóban elveszítünk egy stabil párosítást, bizonyosan marad még legalább egy másik stabil párosítás a gráfban. Irving munkája nyomán az derült ki, hogy amennyiben a fenti transzformációk egyike sem hajtható végre, úgy a gráf maga egy párosítás (ami persze stabil párosítása a kiindulási gráfnak), vagy pedig van a gráfnak egy olyan páratlan kör komponense, amelyben mindenki a kör mentén utána következő szomszédját preferálja a megelőzővel szemben. Ebben az esetben tehát a vizsgált gráfnak, így az inputban szereplőnek sincs stabil párosítása.

Irving algoritmusának segítségével Tan mutatott rá [48], hogy nem páros gráfok esetén mindig létezik egy ún. stabil partíció, amit mi stabil félpárosításnak hívunk, és az alábbiakban definiálunk. Ez a stabil partíció vagy egy párosítás, és így stabil párosítása az inputgráfnak, vagy egy rövid bizonyítéka annak, hogy az inputgráfnak nincs stabil párosítása. Ezt utóbbi eredmény általánosításához van szükségünk az alábbi fogalmakra.

Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf a V csúcshalmazon, azaz $E \subseteq V$ teljesül minden $E \in \mathcal{E}$ hiperélre. Legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés a v csúcsra illeszkedő hiperélek $\mathcal{E}(v)$ halmazán. A hiperélek $\mathcal{E}'$ halmaza *párosítás*, ha az $\mathcal{E}'$-beli élek diszjunktak, azaz ha $|\mathcal{E}'(v)| \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra. Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}$ nemnegatív vektor *törtpárosítás*, ha minden $v \in V$ csúcsra $\widetilde{x}(\mathcal{E}(v)) \leq 1$ áll. Ha x olyan törtpárosítás, amelyre $x(E) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

minden E hiperél esetén, akkor x *félpárosítás*, ha pedig $x(E) \in \{0,1\}$ teljesül minden hiperélre, akkor x-et *egészpárosításnak* nevezzük. (Világos, hogy az egészpárosítások pontosan a párosítások karakterisztikus vektorai.) Az x törtpárosítás akkor *stabil*, ha minden $E \in \mathcal{E}$ élnek van olyan $v \in V$ csúcsa, amire $\sum\{x(F) : F \preceq_v E\} \geq 1$ teljesül, azaz az E-nél nem rosszabb élek elérik a v csúcs lehetséges maximális lefedettségét. Könnyen látható, hogy ha x a G gráf egy stabil félpárosítása, akkor $x^{-1}(1)$ a G egy párosítását alkotja, míg $x^{-1}(\frac{1}{2})$ komponensei olyan körök lesznek G-ben, melyekben a preferencia ciklikus. A fenti terminológiával az 1.1. Tétel úgy is fogalmazható, hogy minden páros gráfnak tetszőleges csúcspreferenciák esetén van stabil egészpárosítása. Tan az alábbi tételt igazolta gráfok esetén.

7.1. Tétel (Tan, [48]) *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf és tetszőleges $\preceq_v$ lineáris csúcspreferenciák esetén a G gráfnak található stabil félpárosítása. Továbbá, ha x és y stabil félpárosítások, akkor az $x^{-1}(\frac{1}{2})$ és $y^{-1}(\frac{1}{2})$ páratlan körei megegyeznek. Következésképp G-nek pontosan akkor létezik stabil párosítása, ha van olyan x stabil félpárosítás, amelyre $x^{-1}(\frac{1}{2})$-ben nincs páratlan kör.*

Scarf játékelméletből jól ismert lemmája [47] segítségével az alábbi általánosítást sikerült igazolni.

7.2. $\boxed{\text{Tétel}}$ (Aharoni, Fleiner [3]) *Minden véges $\mathcal{H}$ hipergráfnak tetszőleges $\preceq_v$ csúcspreferenciák esetén létezik stabil törtpárosítása. Abban a speciális esetben, ha $\mathcal{H}$ gráf, stabil félpárosítás is létezik.*

Érdemes megjegyezni, hogy a Scarf lemmára történő visszavezetés nem ad hatékony algoritmust a kezünkbe, ugyanis a Scarf lemmához kapcsolódó probléma PPAD-teljes. Így a következő természetes kérdés az, hogy különféle általánosított problémák esetén (mint amilyen pl. a stabil b-párosítás) vajon van-e hatékony algoritmus a stabil megoldás keresésére. Cechlárová és Fleiner munkája nyomán az derült ki, hogy két elemi konstrukció segítségével a stabil b-párosítás probléma visszavezethető a stabil párosítás problémára [9]. Ezen kívül sikerült kiterjeszteni Irving algoritmusát is stabil b-párosítás keresésére, valamint a 3.4. Tétel nempáros gráf esetére vonatkozó általánosítása is bizonyítást nyert.

7.3. $\boxed{\text{Tétel}}$ (Ceclárová, Fleiner [9]) *Irving algoritmusa kiterjeszthető nem feltétlenül páros gráf stabil b-párosítás keresésére. Ezen kívül nem feltétlenül páros gráfok stabil b-párosításaira is teljesül a 3.4. Tétel következménye.*

Irving algoritmusa azonban más irányba általánosítható. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf minden egyes v csúcsához adott egy $(P_v, \leq_v)$ poset és egy f_v leképezés $E(v)$-ről P_v-re. Azt mondjuk, hogy $e \preceq_v e'$, ha $f_v(e) \leq_v f_v(e')$ teljesül, és az így kapott $\preceq_v$ relációt *gyenge preferenciának* nevezzük. A v-re illeszkedő e és e' élek esetén v számára négyféle lehetőség képzelhető el: e jobb e'-nél, e' jobb e-nél, e és e' egyformán jók, valamint e és e' nem összehasonlíthatók. Tegyük fel, hogy adott még G tiltott éleinek egy F halmaza. Az $M \subseteq E$ párosítást akkor nevezzük *szuperstabilnak*, ha $M \subseteq E \setminus F$ és minden $e \in E$ élre van olyan v csúcs és $m \in M$ él, amire $m \preceq_v e$ teljesül.

7.4. $\boxed{\text{Tétel}}$ (Fleiner, Irving, Manlove [18]) *Adott $G = (V, E)$ gráf, $F \subseteq E$ tiltott élhalmaz és a csúcsok $\preceq_v$ gyenge preferenciái esetén polinomidőben eldönthető, van-e szuperstabil párosítás, és ha van ilyen, akkor polinomidőben meg is található, mégpedig Irving algoritmusának alkalmas kiterjesztésével.*

Az Irving algoritmusában rejlő lehetőségek korántsem merültek ki a fentiekkel. Láttuk, hogy a páros gráfok esetén a stabil párosítás létezéséről szóló tétel kiterjeszthető a kiválasztási függvényekkel leírt általánosított modellre. Ugyanígy természetes kérdésként vetődik fel az ilyen irányú általánosítás lehetősége nem feltétlenül páros gráfok esetén. Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ véges gráf és legyen adott minden $v \in V$ csúcsra egy-egy $\mathcal{F}_v : 2^{E(v)} \to 2^{E(v)}$ komonoton kiválasztási függvény, $\mathcal{D}_v$ determinánssal. Azt mondjuk, hogy az élek K halmaza $\mathcal{F}$*-kernel*, ha

- $\mathcal{F}_v(K(v)) = K(v)$ teljesül minden $v \in V$ esetén, valamint
- minden $e \in E \setminus K$ esetén van olyan v csúcsa e-nek, amire $e \notin \mathcal{F}_v(K(v) \cup \{e\})$ áll.

Hasonlóan a félpárosításhoz, definiálható az $\mathcal{F}$-félkernel fogalma is, amit itt most nem teszünk meg, csupán rámutatunk a jelentőségére.

7.5. Tétel (Fleiner [13]) *Ha véges $G = (V, E)$ véges gráf, és $\mathcal{F}_v : 2^{E(v)} \to 2^{E(v)}$ növekedő komonoton kiválasztási függvény minden $v \in V$ esetén, akkor van $\mathcal{F}$-félkernel. Ilyen $\mathcal{F}$-félkernel polinomidőben található Irving algoritmusának alkalmas kiterjesztésével.*

Továbbá tetszőleges K_1 és K_2 $\mathcal{F}$-félkernelek esetén ugyanazok az $\frac{1}{2}$ súlyú élek alkotnak páratlan preferenciaköröket. Tehát G-nek pontosan akkor van $\mathcal{F}$-kernele, ha van olyan $\mathcal{F}$-félkernele, amely nem tartalmaz $\frac{1}{2}$ súlyú páratlan preferenciakört.

Irodalomjegyzék

[1] Hernán Abeledo and Yosef Blum. Stable matchings and linear programming. *Linear Algebra Appl.*, 245:321–333, 1996.

[2] Ron Aharoni, Eli Berger, and Irina Gorelik. Kernels in Weighted Digraphs. *Order*, 31(1):35–43, 2014.

[3] Ron Aharoni and Tamás Fleiner. On a lemma of Scarf. *J. Combin. Theory Ser. B*, 87(1):72–80, 2003.

[4] Mourad Baïou and Michel Balinski. Many-to-many matching: stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry). *Discrete Appl. Math.*, 101(1-3):1–12, 2000.

[5] Mourad Baïou and Michel Balinski. The stable admissions polytope. *Math. Program.*, 87(3, Ser. A):427–439, 2000.

[6] Péter Biró, Katarína Cechlárová, and Tamás Fleiner. The dynamics of stable matchings and half-matchings for the stable marriage and roommates problems. *International Journal of Game Theory*, 36(3-4):333–352, 2008.

[7] Péter Biró, Tamás Fleiner, Robert W Irving, and David F Manlove. The college admissions problem with lower and common quotas. *Theoretical Computer Science*, 411(34-36):3136–3153, 2010.

[8] Charles Blair. The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners. *Math. Oper. Res.*, 13(4):619–628, 1988.

[9] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner. On a generalization of the stable roommates problem. *ACM Trans. Algorithms*, 1(1):143–156, 2005.

[10] Tamás Fleiner. Some results on stable matchings and fixed points. Technical report, EGRES report TR-2002-8, ISSN 1587-4451, December 2002. `http://www.cs.elte.hu/egres`.

[11] Tamás Fleiner. A fixed-point approach to stable matchings and some applications. *Math. Oper. Res.*, 28(1):103–126, 2003.

[12] Tamás Fleiner. On the stable b-matching polytope. *Math. Social Sci.*, 46(2):149–158, 2003.

[13] Tamás Fleiner. The stable roommates problem with choice functions. *Algorithmica*, 58(1):82–101, 2010.

[14] Tamás Fleiner. On stable matchings and flows. *Algorithms*, 7(1):1–14, 2014.

[15] Tamás Fleiner. A note on restricted list edge-colourings. *Combinatorica*, Apr 2018.

[16] Tamás Fleiner. Stable and crossing structures, August, 2000. PhD dissertation, http://www.renyi.hu/~fleiner.

[17] Tamás Fleiner and András Frank. Balanced list edge-colourings of bipartite graphs. Technical Report TR-2010-01, Egerváry Research Group, Budapest, 2010. www.cs.elte.hu/egres.

[18] Tamás Fleiner, Robert W. Irving, and David F. Manlove. An algorithm for a super-stable roommates problem. *Theoret. Comput. Sci.*, 412(50):7059–7065, 2011.

[19] Tamás Fleiner, Tamura Akihisa Jankó, Zsuzsanna, and Alexander Teytelboym. Trading networks with bilateral contracts. Submitted to Theoretical Economics, 2018.

[20] Tamás Fleiner and Zsuzsanna Jankó. On weighted kernels of two posets. *Order*, 33(1):51–65, 2016.

[21] Tamás Fleiner and Naoyuki Kamiyama. A matroid approach to stable matchings with lower quotas. *Math. Oper. Res.*, 41(2):734–744, 2016.

[22] D. Gale and L.S. Shapley. College admissions and stability of marriage. *Amer. Math. Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[23] Fred Galvin. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 63(1):153–158, 1995.

[24] Dan Gusfield and Robert W. Irving. *The stable marriage problem: structure and algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[25] John William Hatfield and Scott Duke Kominers. Matching in networks with bilateral contracts. *American Economic Journal: Microeconomics*, 4(1):176–208, 2012.

[26] John William Hatfield and Scott Duke Kominers. Multilateral matching. *Journal of Economic Theory*, 156:175–206, 2015.

[27] John William Hatfield, Scott Duke Kominers, Alexandru Nichifor, Michael Ostrovsky, and Alexander Westkamp. Stability and competitive equilibrium in trading networks. *Journal of Political Economy*, 121(5):966–1005, 2013.

[28] John William Hatfield and Paul Milgrom. Matching with contracts. *American Economic Review*, 95(4):913–935, 2005.

[29] A. J. Hoffman. On lattice polyhedra. III. Blockers and anti-blockers of lattice clutters. *Math. Programming Stud.*, (8):197–207, 1978. Polyhedral combinatorics.

[30] Chien-Chung Huang. Classified stable matching. In *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 1235–1253, Philadelphia, PA, 2010. SIAM.

[31] Robert W. Irving. An efficient algorithm for the „stable roommates" problem. *J. Algorithms*, 6(4):577–595, 1985.

[32] Jr Kelso, Alexander S. and Vincent P. Crawford. Job matching, coalition formation, and gross substitutes. *Econometrica*, 50:1483–1504, 1982.

[33] Tamás Király and Júlia Pap. Stable multicommodity flows. *Algorithms*, 6(1):161–168, 2013.

dc_1564_18

[34] Zoltán Király. Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem. *Algorithmica*, 60(1):3–20, 2011.

[35] Bettina Klaus and Flip Klijn. Median stable matching for college admissions. *Internat. J. Game Theory*, 34(1):1–11, 2006.

[36] Bronisław Knaster. Un théorème sur les fonctions d'ensembles. *Ann. Soc. Polon. Math.*, 6:133–134, 1928.

[37] Donald E. Knuth. *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. An introduction to the mathematical analysis of algorithms, Translated from the French by Martin Goldstein and revised by the author.

[38] David F Manlove. *Algorithmics of matching under preferences*, volume 2. World Scientific, 2013.

[39] Michael Ostrovsky. Stability in supply chain networks. *American Economic Review*, 98(3):897–923, 2006.

[40] J. S. Pym. A proof of the linkage theorem. *J. Math. Anal. Appl.*, 27:636–638, 1969.

[41] Alvin E. Roth. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *J. of Political Economy*, 92:991–1016, 1984.

[42] Alvin E. Roth, Uriel G. Rothblum, and John H. Vande Vate. Stable matchings, optimal assignments, and linear programming. *Math. Oper. Res.*, 18(4):803–828, 1993.

[43] Alvin E. Roth and Marilda Sotomayor. The college admissions problem revisited. *Econometrica*, 57(3):559–570, 1989.

[44] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor. *Two-sided matching*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. A study in game-theoretic modeling and analysis, With a foreword by Robert Aumann.

[45] Uriel G. Rothblum. Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope. *Math. Programming*, 54(1, Ser. A):57–67, 1992.

[46] B. Sands, N. Sauer, and R. Woodrow. On monochromatic paths in edge-coloured digraphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 33(3):271–275, 1982.

[47] Herbert E. Scarf. The core of an N person game. *Econometrica*, 35:50–69, 1967.

[48] Jimmy J. M. Tan. A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *J. Algorithms*, 12(1):154–178, 1991.

[49] Alfred Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific J. of Math*, 5:285–310, 1955.

[50] Chung-Piaw Teo and Jay Sethuraman. The geometry of fractional stable matchings and its applications. *Math. Oper. Res.*, 23(4):874–891, 1998.

[51] John H. Vande Vate. Linear programming brings marital bliss. *Oper. Res. Lett.*, 8(3):147–153, 1989.